Números complejos
Representación polar

Sergio A. Carrillo
sacarrillot@unal.edu.co

Sobre $\mathbb{C}$

Recordemos que los números complejos

$$\mathbb{C} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$$

con las operaciones

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d), \qquad (a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc),$$

son un cuerpo. Si $i=(0,1)$, entonces $i^2=(-1,0)$. Así podemos escribir

$$(a,b)=(a,0)\cdot(1,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+ib,$$

conocida como la representación cartesiana.

Más sobre complejos

Recordemos que dados $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$, la norma es multiplicativa, es decir,

$$|zw| = |z| \cdot |w|, \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Esto significa que

$$(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

- El producto de dos números que son sumas de dos cuadrados vuelve a ser suma de dos cuadrados.
- El círculo unitario $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un subgrupo de $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

Distancia

Note que $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ y $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$. Por otra parte, tenemos la desigualdad triangular

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Esto nos permite definir la distancia entre dos complejos por la fórmula

$$d(z, w) = |z-w|,$$

de manera que d satisface las propiedades de positividad, simetría y desigualdad triangular.

Discos y rectas

- $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ es el disco con centro z_0 y radio $r > 0$. Su frontera es la circunferencia

$$\partial D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

- La recta ℓ que pasa por $a \in \mathbb{C}$ con dirección $b \in \mathbb{C}^*$ se parametriza por $t \in \mathbb{R} \mapsto a + tb$. De forma implícita

$$\ell = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\left(\frac{z - a}{b}\right) = 0 \right\}.$$

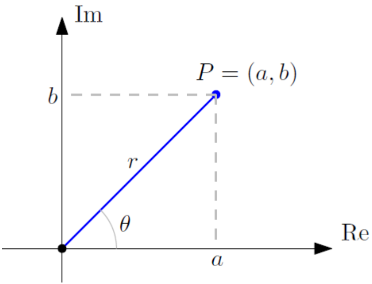
Representación polar

Si $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$, entonces $\frac{z}{|z|} = x + iy \in S^1$ y así

$$x = \cos\theta, \qquad y = \sin\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Si $r = |z|$, obtenemos forma polar de $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

$$\text{arg}(z) := \{\theta + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \quad \text{(argumento de } z\text{)}.$$



Fórmula de Euler y Moivre

Formalmente definimos

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \in S^1.$$

- $e^{i(\theta+2\pi k)} = e^{i\theta}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. En particular,

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

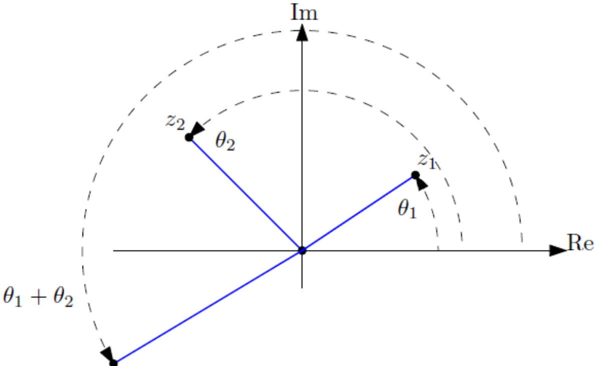
- $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2}$.
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$.
- (Moivre) $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$, donde $n \in \mathbb{Z}$. Explícitamente

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Forma exponencial

Si $z \in \mathbb{C}^*$ podemos escribir $z = |z|e^{i\theta}$. Además si $w = |w|e^{i\varphi}$, entonces

$$zw = |zw|e^{i(\theta+\varphi)}, \qquad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}e^{i(\theta-\varphi)}.$$



Raíces n-ésimas de la unidad

Ellas son las soluciones de la ecuación $w^n = 1$ y están dadas por

$$1, \quad \omega_n = e^{2\pi i/n}, \quad \omega_n^2 = e^{4\pi i/n}, \quad \ldots, \quad \omega_n^{n-1} = \omega_n^{-1} = e^{2\pi i(n-1)/n}.$$

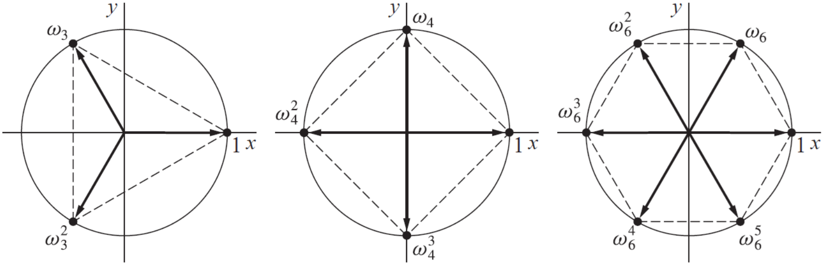
Es decir por las potencias $\omega_n^k = e^{2\pi ik/n}, k = 0, 1, \ldots, n-1$. Estos números subdividen a S^1 en n arcos del mismo tamaño comenzando desde 1.

- $(n = 2)$ Las raíces son $1, -1$.
- $(n = 4)$ Las raíces son $1, i, -1, -i$.

Ejemplos

Para $n = 3$ las raíces son 1,

$$\omega_3 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \omega_3^2 = \omega_3^{-1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Raíces de un complejo

Para resolver la ecuación

$$z^n = z_0,$$

donde $n \in \mathbb{N}^+$ y $z_0 \in \mathbb{C}^*$ es dado, basta escribir $z_0 = |z_0|e^{i\theta_0}$ y $z = re^{i\theta}$. Al operar se obtiene que

$$r = |z_0|^{1/n}, \qquad \theta = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \ldots, n-1.$$