Operaciones binarias

Sergio A. Carrillo
sacarrillot@unal.edu.co

Los sistemas básicos

En este curso estudiaremos los sistemas numéricos dados por los números naturales $\mathbb{N}$, los enteros $\mathbb{Z}$ (der Zahl, de número en alemán), los racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$ y los complejos $\mathbb{C}$. y sus propiedades básicas.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}, \qquad \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\},$$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b \neq 0\right\}, \qquad \mathbb{R} = \left\{x = \lim_{n \to +\infty} a_n : a_n \in \mathbb{Q}\right\}$$

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Operaciones binarias

Una operación binaria sobre un conjunto $A \neq \emptyset$ es una aplicación $* : A \times A \to A$. Es usual emplear la notación

$$*(a, b) = a * b.$$

Para mostrar que una operación binaria está bien definida se debe comprobar que $a * b \in A$, para todo $a, b \in A$.

La pareja $(A, *)$ se conoce como una *estructura algebraica*.

Si $|A| = n$, el número de operaciones binarias es $|A^{A \times A}| = n^{n^2}$.

Ejemplos

- La suma y producto usuales

$$+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

  son operaciones binarias. Lo mismo es válido para $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. También para $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$. Uno de los objetivos del curso es construir estas operaciones binarias.
- La resta $a - b$ para números naturales no es una operación binaria porque su resultado no siempre es un natural.

Ejemplos (retículos)

En $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (al tener un orden total) se puede definir

$$a \wedge b = \min(a, b), \qquad a \vee b = \max(a, b)$$

que son operaciones binarias. Note que ellas satisfacen las reglas

$$a \vee (a \wedge b) = a, \qquad a \wedge (a \vee b) = a,$$

$$a \wedge a = a \vee a = a.$$

Ejemplos (conjuntos)

Si $X \neq \emptyset$ es un conjunto y $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto de sus partes, entonces la unión e intersección

$$\cup : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \qquad \cap : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

son operaciones binarias. También lo es la diferencia y la diferencia simétrica

$$A \setminus B = A \cap (X \setminus B), \qquad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Ejemplos (álgebra lineal)

- (Vectores) En $\mathbb{R}^n$ la operación de suma por componentes es una operación binaria

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

- (Matrices) El conjunto de matrices $\mathbb{R}^{n\times m}$ (con entradas reales de n filas y m columnas) se puede dotar de suma: Si $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, entonces $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Si $n = m$, también podemos multiplicarlas por la regla

$$A \cdot B = (c_{ij}), \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Propiedades generales

Una operación binaria es:

- (Asociativa) Si $a * (b * c) = (a * b) * c$, para todo $a, b, c \in A$.
- (Conmutativa) Si $a * b = b * a$, para todo $a, b \in A$.

Neutro e inversos

- (Elemento neutro) Si $e \in A$ es tal que $e * a = a = a * e$, para todo $a \in A$, e se llama elemento neutro para la operación $*$. En este caso $*$ se dice *modulativa*.

- Si $(A, *)$ tiene elemento neutro, este es único. En efecto, si e, e' son neutros entonces $e = e * e' = e'$.

- Si $(A, *)$ tiene elemento neutro e, se dice que a es invertible si existe $a' \in A$ tal que $a * a' = e = a' * a$.

- Si a es invertible y la operación es asociativa, su inverso es único. En efecto, si a', a'' son inversos de a, entonces

$$a' = a' * e = a' * (a * a'') = (a' * a) * a'' = e * a'' = a''.$$

Ejemplos

- En $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ la suma y multiplicación es asociativa, conmutativa y tiene elementos neutros 0 y 1 respectivamente.
- En $\mathbb{N}$, 0 es el único con inverso para la suma. En $\mathbb{Z}$ todos tienen inversos aditivos, pero solo ± 1 tienen inverso para la multiplicación. En $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ todo elemento $x \neq 0$ tiene inverso para la multiplicación.
- $(\mathbb{R}^n, +), (\mathbb{R}^{n\times m}, +)$ son asociativos y conmutativos, mientras que la matriz nula (todas sus entradas son cero) es el elemento neutro.
- $(\mathbb{R}^{n\times n}, \cdot)$ es asociativo, pero no conmutativo. La matriz identidad $I_n = (\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ es el elemento neutro.

Operaciones en tablas

Para $A = \{0, 1\}$, tenemos $2^{2^2} = 2^4 = 16$ operaciones posibles.

1. $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$ **2.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$ **3.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ **4.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$

5. $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$ **6.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$ **7.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ **8.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$

9. $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$ **10.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$ **11.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ **12.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$

13. $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}$ **14.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$ **15.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ **16.** $\begin{array}{c|cc} \star & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$

Operaciones en tablas

- Si $(A, *)$ está representado en una tabla, la operación es conmutativa si la tabla es simétrica respecto a la diagonal. En el ejemplo anterior las conmutativas son la $1, 2, 7, 8, 9, 10, 15, 16$.
- La operación 7 es asociativa, conmutativa, el 0 es el neutro y todo elemento tiene inverso.
- Si existe $e \in A$ neutro, su efecto en la tabla es dejar su fila y columna correspondiente iguales. En el ejemplo, 2, 7, 8, 10 tienen neutro.