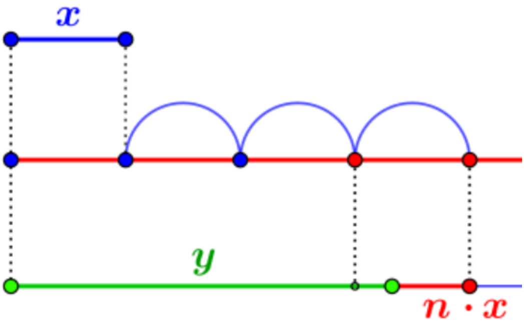
Los números reales. Axioma de completitud

Sergio A. Carrillo
sacarrillot@unal.edu.co

Propiedad arquimediana en $\mathbb{Q}$

Teorema (Propiedad arquimediana)

Si $x > 0$ e $y \in \mathbb{Q}$ son racionales, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $nx > y$.



Valor absoluto

El valor absoluto de un número racional a se define como

$$|a| = a, \text{ si } a \geq 0 \qquad |a| = -a, \text{ si } a < 0.$$

En otras palabras, $|a| := \max\{a, -a\}$. Note que $|\pm a| = |a|$ y $\pm a \leq |a|$. Se sigue si $b > 0$,

$$|x| \leq b \quad \text{si y solo si} \quad -b \leq x \leq b.$$

En particular, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Distancia

Dados $x, y \in \mathbb{Q}$ se define su distancia natural como

$$d : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \qquad d(x, y) = |x - y|.$$

Ella satisface las siguientes propiedades:

- (Positividad) $d(x, y) \geq 0$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$ y $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.
- (Simetría) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.
- (Desigualdad triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Sucesiones

Una sucesión con valores en un conjunto X es una aplicación

$$f : \mathbb{N} \to X, \qquad n \mapsto f(n) = a_n.$$

Por ejemplo, las siguientes son sucesiones con valores en $\mathbb{Q}$:

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{n+1}{n}, \qquad c_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

Los agujeros de $\mathbb{Q}$

En $\mathbb{Q}$ existen conjuntos acotados superiormente que no tienen supremo.

- $A = \{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots\}$.
- $B = \{3, 3.1, 3.14, 3.141, 3.1415, 3.14159, \dots\}$.
- $a_n = [1; 1, \dots, 1] \in \mathbb{Q}$ (n 1s consecutivos).
- $E = \{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ donde $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Note que
  - $a_1 = 2$,
  - $a_2 = \frac{9}{4} = 2.25$,
  - $a_3 = \frac{64}{27} = 2.\overline{370}$,
  - $a_4 = \frac{625}{256} = 2.44140625$,
  - $a_5 = \frac{7776}{3125} = 2.48832$,
  - $a_6 = \frac{117649}{46656} = 2.5216263717$,
  - $a_7 = \frac{2097152}{823543} = 2.5446417190$,
  - $a_8 = \frac{43046721}{16777216} = 2.5657845139$,

Convergencia

Definición

Decimos que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ *converge a* $x \in \mathbb{Q}$ si para cada racional $\epsilon > 0$, existe $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ (el cual sólo depende de ϵ) tal que

$$d(x_n, x) < \epsilon, \qquad \text{para todo } n \geq N. \tag{1}$$

Emplearemos la notación $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

Ejemplos de expansiones decimales

- $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0.
- $a_n = 0,16...6$ (n 6's) converge a $\frac{1}{6}$.
- ¿Qué sucede en el caso de aproximaciones decimales que no son periódicas?

Cotas superiores e inferiores

Definición

Sea $(X,<)$ un conjunto ordenado y $\emptyset \neq A \subseteq X$. A está *acotado superiormente* si existe $x_0 \in X$ tal que

$$a \leq x_0, \text{ para todo } a \in A.$$

Aquí x_0 es una *cota superior* de A. Si $x_0 \in A$ decimos que x_0 es el *máximo* de A.

Al intercambiar $\leq$ por $\geq$, x_0 es una *cota inferior* de A y A se dice *acotado inferiormente*. Si $x_0 \in A$, este se llama el *mínimo* de A.

Supremo e ínfimo

Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado y $A \subseteq X$ acotado superiormente. Si el conjunto de cotas superiores de A tiene un mínimo $\alpha \in X$, este se llama el *supremo* de A y lo denotaremos por

$$\alpha = \sup A.$$

De la misma manera, si el conjunto A es acotado inferiormente y su conjunto de cotas inferiores tiene máximo $\beta \in X$, este se conoce como el *ínfimo* de A y se denota por $\beta = \inf A$.

Ejemplos

- El conjunto $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente porque dado $n \in \mathbb{N}$, entonces $n+1 \in \mathbb{N}$ y $n < n+1$.
- El conjunto $E = \{1/n \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}^+\}$ en $\mathbb{Q}$ es acotado superiormente y $\sup E = 1$. Por otra parte, es acotado inferiormente por 0. Además, si $a/b \in \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{N}^+$, y tomamos $N \in \mathbb{N}$ con $b/a < N$, entonces $0 < 1/N < a/b$ y por tanto ningún racional positivo es cota inferior de E. En conclusión, $\inf E = 0$.

Axioma del Supremo

Si existe $\alpha = \sup A$ este satisface que:

1. $a \leq \alpha$, para todo $a \in A$.
2. Si $b < \sup A$, existe $a \in A$ tal que $b < a \leq \sup A$. De lo contrario, b sería una cota superior de A menor que su supremo.

Definición (Axioma del supremo)

Sea $(X, <)$ un conjunto ordenado. Si todo subconjunto $\emptyset \neq A \subseteq X$ que es acotado superiormente posee supremo en X, decimos que $(X, <)$ tiene *la propiedad del supremo* o que satisface el *axioma de completitud*.

Presentación axiomática de $\mathbb{R}$

Teorema

Existe un único cuerpo ordenado y completo $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$*.*

Note que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Los números reales que no son racionales se denominan *irracionales*.

El axioma del supremo garantiza que valores como

$$\sqrt{2} = \sup\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, \dots\},$$

existan en $\mathbb{R}$.

Propiedad arquimediana en $\mathbb{R}$

Teorema (Propiedad arquimediana)

Si $x > 0$ e $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}^+$ tal que $nx > y$.

Prueba.

Veamos que

$$A = \{mx \in \mathbb{R} : m \in \mathbb{N}\}$$

no es acotado superiormente y así y no sería cota superior de A. Si A es acotado superiormente, por el axioma del supremo existe $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Como $x > 0$, entonces $\alpha - x < \alpha$. Así existe $mx \in A$ tal que $\alpha - x < mx \leq \alpha$. Luego $\alpha < (m+1)x$, pero $(m+1)x \in A$, contradiciendo que α era dicho supremo. En conclusión, A no puede ser acotado superiormente. $\square$

Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

El axioma del supremo también implica la existencia de la función parte entera $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$.

Teorema

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < q < y.$$

Prueba.

Como $y - x > 0$, por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}^+$ con $(y - x)n > 1$. Así

$$nx < nx + 1 < ny.$$

Sean $m = \lfloor nx + 1 \rfloor \in \mathbb{Z}$ y $q = m/n$. Entonces q satisface las desigualdades requeridas. $\square$

El principio de intervalos encajados

Teorema

Para cada $n \in \mathbb{N}$ *considere un intervalo* $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ *con* $a_n < b_n$. *Suponga que* $I_{n+1} \subseteq I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset.$$

Por hipótesis

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0.$$

Por el axioma de completitud existen $a = \sup A$, $b = \inf B$ y

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n.$$