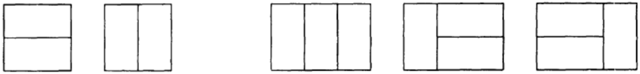
Permutaciones. Coeficientes binomiales

Sergio A. Carrillo
sacarrillot@unal.edu.co

Ejemplo

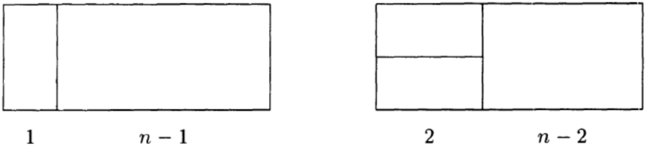
Un camino tiene 2 metros de ancho y n metros de largo. Si queremos pavimentarlo con baldosas de 1×2, ¿de cuántas formas se puede hacer?
Sea p_n el número de formas de pavimentar el camino de largo n.
Es claro que

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = 2, \qquad p_3 = 3.$$



Ejemplo

Podemos hallar p_n en términos de p_{n-1} y p_{n-2} siguiendo el siguiente diagrama:



Por el principio aditivo, $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$, $n \geq 3$. Así las soluciones son los números de Fibonacci $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$. Más precisamente, se sigue por inducción que

$$p_n = F_{n+1}.$$

El factorial

El número de formas de organizar n objetos en linea recta es

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Su definición es recursiva:

$$1! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n!.$$

Ejemplos

- Hay que formar un comité de 4 de entre 20 personas disponibles. ¿De cuántas formas se puede hacer?

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = \frac{20!}{16!} = 116280.$$

- En general, si disponemos de n objetos y hay que organizar r de ellos $(1 \leq r \leq n)$ en línea recta, hay

$$n(n-1)\cdots(n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

  formas de hacerlo.

- ¿Cuántas funciones inyectivas hay de $[n]$ a $[m]$, donde $n, m \in \mathbb{N}^+$?

Permutaciones

Una permutación de un conjunto de n objetos es una forma de ordenar dichos objetos en línea recta.

- ¿De cuántas formas se puede ordenar el conjunto $\{1, 2, 3\}$? es decir, ¿cuántas permutaciones hay de 3 elementos?

Respuesta: $3! = 6$.

El principio multiplicativo muestra que si el conjunto tiene n elementos, entonces hay $n!$ permutaciones posibles.

Ejemplo: ¿Cuántas permutaciones de las letras ABCDEFGH hay que contengan la cadena ABC?

El grupo simétrico o de permutaciones

Fijado $n \geq 1$, el conjunto

$$S_n = \{\sigma : [n] \to [n] : \sigma \text{ es biyectiva}\}$$

es un grupo con la composición. Además, este tiene $n!$ elementos.

Combinaciones y Coeficientes binomiales

Una r-combinación de un conjunto A de n elementos es una elección de r elementos de A.

El número total de r-combinaciones se suele denotar por

$$C(n,r) = \binom{n}{r}$$

y se conoce con el nombre de un *coeficiente binomial*.

Coeficientes binomiales y el factorial

Teorema

Si $0 \leq r \leq n$, *entonces*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}.$$

Prueba.

Hay $n(n-1)\cdots(n-r+1)$ formas de permutar r elementos de un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Esto también se puede hacer primero eligiendo r elementos de A (hay $\binom{n}{r}$ formas de hacerlo) y luego organizando estos r objetos (de $r!$ posibles). El principio multiplicativo conlleva al resultado. $\square$

Ejemplos

- ¿De cuántas formas se pueden seleccionar 5 cartas diferentes de una baraja de 52 cartas?
- ¿De cuántas formas se puede seleccionar 6 estudiantes del curso para que vayan a las olimpiadas de matemáticas?
- ¿Cuántos dígitos binarios de longitud 10 contienen a lo más 4 unos? ¿cuántos el mismo número de 0s y 1s?
- ¿De cuántas formas se pueden organizar en fila 8 hombres y 5 mujeres de forma que dos mujeres no estén juntas?

Simetría de los coeficientes binomiales

Si $0 \leq r \leq n$, se verifica que

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}.$$

Esta igualdad tiene un significado combinatorio: elegir un subconjunto $B \subseteq A$, donde $|A| = n$ y $|B| = r$ da lugar a elegir su complemento $A \setminus B$ y $|A \setminus B| = n - r$.

El triángulo de Pascal

La identidad de Pascal asegura que si $n \geq k$, entonces

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

De nuevo esto tiene una interpretación combinatoria: sea A con $n+1$ elementos y fije $a \in A$. Para elegir los subconjuntos $B \subseteq A$ se tienen dos opciones: si $a \in B$, hay $\binom{n}{k-1}$ formas de hacerlo y si $a \notin B$ hay $\binom{n}{k}$ formas de hacerlo. El principio aditivo concluye la fórmula.

El triángulo de Pascal

$$
\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6} \\
\binom{7}{0} \quad \binom{7}{1} \quad \binom{7}{2} \quad \binom{7}{3} \quad \binom{7}{4} \quad \binom{7}{5} \quad \binom{7}{6} \quad \binom{7}{7}
\end{array}
$$

Pascal

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1
\end{array}
$$

El teorema del binomio

Si $x, y \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j \\ &= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + y^n.\end{aligned}$$

Ejemplos

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1,\\
(x+y)^1 &= x+y,\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2,\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4,\\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5\\
&\ \,\vdots
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- ¿Cuál es el coeficiente de $x^{10}y^{11}$ en la expresión $(11x-10y)^{21}$?
  Por el teorema del binomio, el término requerido es

$$\binom{21}{10}(11x)^{10}(-10y)^{11} = 11^{10}(-10)^{11}\binom{21}{10}x^{10}y^{11}.$$

- ¿Cuál es el coeficiente de x^2 en la expresión $(3x^2-2x^{-1})^7$?
  Al expandir obtenemos

$$\sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}(3x^2)^k(-2x^{-1})^{7-k} = \sum_{k=0}^{7}\binom{7}{k}3^k(-2)^{7-k}x^{3k-7}.$$

  Como $3k-7=2$ si $k=3$, el coeficiente buscado es $\binom{7}{3}\cdot 3^3\cdot(-2)^{7-3} = 35\cdot 27\cdot 16 = 15120.$.

Ejemplo: número total de subconjuntos

Si $|A| = n$, ¿cuántos subconjuntos posibles tiene A?

Clasificando por el tamaño de los subconjuntos, el número total será

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n} = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = (1+1)^n = 2^n.$$

Ejemplo: sumas alternadas

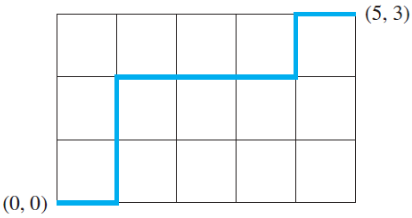
La siguiente identidad siempre es válida,

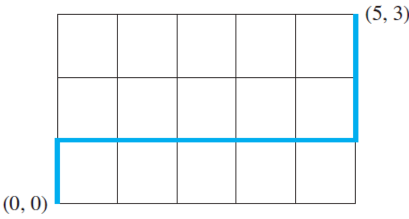
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^j = 0,$$

poniendo $x = 1$ y $y = -1$ en el teorema del binomio.

Contando caminos

Fije $m, n \in \mathbb{N}$. ¿Cuántos caminos posibles hay del punto $(0,0)$ a (m,n) de manera que cada camino se forma dando un paso de una unidad horizontal o vertical?





Contando caminos: solución

Un camino se forma en cada paso avanzando una unidad hacia arriba o la derecha. Hay que dar en total $m + n$ pasos.

Indiquemos por $\rightarrow$ si se da paso hacia la derecha y por $\uparrow$ si el paso es hacia arriba. Así un camino queda descrito como una sucesión

$$a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n+m}, \qquad a_j = \rightarrow, \uparrow,$$

donde hay exactamente m pasos a la derecha y n hacia arriba. Por tanto, hay un total de

$$\binom{m+n}{n} = \binom{m+n}{m} \quad \text{caminos.}$$

Soluciones de ecuaciones

¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

donde x_1, x_2, x_3 son enteros no-negativos?

Una solución consiste en colocar dos cuadros negros en el diagrama anterior. Por tanto, hay

$$\binom{5+2}{2} = \binom{7}{2} = 21.$$

Soluciones de ecuaciones

Siguiendo la misma estrategia, el número de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son enteros no-negativos es

$$\binom{k+n-1}{n-1}.$$