Algunas representaciones de $\mathbb{Q}$

Sergio A. Carrillo
sacarrillot@unal.edu.co

Fracciones continuas simples

Dados x_0 y $x_1, \ldots, x_n > 0$ números reales positivos, escribiremos

$$[x_0; x_1, \ldots, x_n] := x_0 + \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_n}}}},$$

para denotar dicha fracción. Por tanto, tenemos que

$$[x_0; x_1, \ldots, x_n] = x_0 + \frac{1}{[x_1, \ldots, x_n]} = \left[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right].$$

Ejemplos

- $$[3;7,15,1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = [3;7,16] = \frac{355}{113} \approx 3.1415929.$$
- Si $a_n > 2$, entonces
$$[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n - 1, 1].$$
- Si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son enteros, entonces $[a_0; a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{Q}$.

Racionales como fracciones continuas simples

Proposición

Cada $r = p/q \in \mathbb{Q}$ se puede representar como una fracción continua finita simple.

Emplear: algoritmo de la división y la relación $\frac{k}{l} = \frac{1}{l/k}$.

Ejemplo:

$$
\begin{array}{rcl|l|l}
53 & = & 15\cdot 3 + 8 & \frac{53}{15} = 3 + \frac{8}{15}, & \frac{53}{15} = 3 + \frac{1}{\frac{15}{8}} \\
15 & = & 8\cdot 1 + 7 & \frac{15}{8} = 1 + \frac{7}{8}, & = 3 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{7}}} \\
8 & = & 7\cdot 1 + 1 & \frac{8}{7} = 1 + \dfrac{1}{7}, & = 3 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{7}}} \\
7 & = & 1\cdot 7 + 0 & &
\end{array}
$$

Expansión decimal

Es posible expandir cada $r \in \mathbb{Q}$ de manera decimal. Por ejemplo,

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857142857... = 0.\overline{142857}.$$

Daremos sentido a estas expansiones a través de la serie geométrica. En este caso

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{8}{10^4} + \frac{5}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \cdots .$$

Expansiones periódicas y finitas

Teorema

Cada $r \in \mathbb{Q}$ *se puede expandir como una serie en base* 10 *finita o infinita periódica. Recíprocamente, cada expansión de este tipo es un número racional.*

Proposición

La expansión decimal de un número racional es finita si y sólo si su denominador (en forma irreducible) es de la forma $2^n 5^m$*, para ciertos* $n, m \in \mathbb{N}$*.*

Corolario

La longitud del periodo de la fracción a/b *es a lo más* $b - 1$*.*

Ejemplos

- Para pasar de expansión finita o periódica a fracción basta con multiplicar por una potencia de 10 y luego restar para encontrar el cociente. Por ejemplo,

$$x = 0.\overline{09}, \qquad 10^2 x = 9.\overline{09}, \qquad (10^2 - 1)x = 9, \qquad x = \frac{1}{11}.$$

- Si $r = k/2^n 5^m \in (0,1)$, completando 10 en el denominador podemos escribir

$$r = \frac{k'}{10^l} = \frac{b_0 + 10b_1 + \cdots + 10^{l-1} b_{l-1}}{10^l} = 0.b_{l-1} \ldots b_1 b_0$$

como expansión decimal finita. Aquí expandimos k' en base 10 $(b_0, \ldots, b_{l-1} \in \{0, 1, \ldots, 9\})$.

La serie geométrica

Dado $x \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^N = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x}, \qquad N \in \mathbb{N}, x \neq 1.$$

Si $|x| < 1$ y $N \to +\infty$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x}.$$

Por ejemplo

$$0,111\cdots = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^j} = \frac{1/10}{1 - 1/10} = \frac{1}{9}.$$