Ejemplos de inducción
Principios de conteo

Sergio A. Carrillo
sacarrillot@unal.edu.co

Ejemplos

- Demostrar que si $n \geq 1$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

- (Potencias de 2) Todo $n \in \mathbb{N}^+$ se puede escribir como sumas de potencias de 2 ($2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, \ldots$). Por ejemplo,

$$5 = 2^2 + 2^0. \qquad 14 = 2^3 + 2^2 + 2^1.$$

Teorema fundamental de la aritmética

Teorema

Todo número natural $n > 1$ *se puede representar de manera única como producto de potencias de números primos*

$$n = p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} = \prod_{j=1}^{k} p_j^{m_j},$$

donde $p_1 < \cdots < p_k$ *son primos y cada* m_j *es un natural positivo.*

El principio de inducción fuerte demuestra que dicha factorización siempre se puede lograr.

Recurrencias lineales de orden 2

Considere la recurrencia

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}, n \geq 2, \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{R} \text{ dados.}$$

Intuición: Al buscar una solución de la forma $a_n = r^n$ obtenemos

$$r^2 = \alpha r + \beta.$$

Esta ecuación puede tener:

- Dos soluciones reales $r_1 \neq r_2$ distintas.
- Dos soluciones reales iguales r_0.
- Dos soluciones complejas $r_+ = a + ib$, $r_- = a - ib$. (Trataremos este caso luego).

Solución de las recurrencias

Proposición

La solución de la recurrencia anterior está dada por:

- *Si* $r_1 \neq r_2$ *son reales,*

  $$a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n,$$

  donde c_1, c_2 *se determinan resolviendo el sistema*

  $$a_0 = c_1 + c_2, \qquad a_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2.$$

- *Si* $r_1 = r_2 = r_0$, *entonces*

  $$a_n = c_1 r_0^n + c_2 n r_0^n = (c_1 + c_2 n) r_0^n,$$

  donde $c_1 = a_0$ *y* $a_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2$.

Los números de Fibonacci

Esta famosa sucesión está definida por

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2.$$

Por el resultado anterior vale la fórmula de Binet

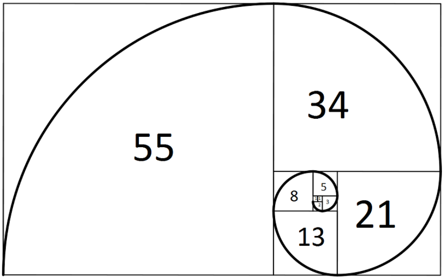
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Aquí $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es la razón áurea $(\varphi^2 = \varphi + 1)$.

Los números de Fibonacci

Los valores obtenidos se conocen como los *números de Fibonacci*:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, \ldots$$



El principio multiplicativo

Suponga que un proceso consiste en dos pasos. Si el primer paso tiene n_1 posibilidades y el segundo tiene n_2, el número total de formas de realizarlo es

$$n_1 \cdot n_2.$$

Otra forma equivalentes es: si A_1 tiene n_1 elementos y A_2 tiene n_2 tiene n_2 elementos, entonces

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

tiene $n_1 \cdot n_2$ elementos. Más generalmente, si $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

https://www.youtube.com/watch?v=FmbmNp1RDCE

El principio aditivo

Recordemos que una *partición de un conjunto* S es una familia de subconjuntos $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ de A que satisface las siguientes condiciones: 1. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A$. 2. $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$.

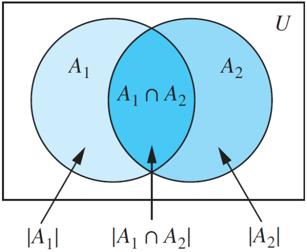
En esta situación, si A es finito, entonces

$$|A| = \sum_{k=1}^{m} |A_k|.$$

Regla de inclusión-exclusión de dos conjuntos

El principio aditivo para dos conjuntos es un caso particular de la siguiente regla: Dados dos conjuntos finitos A_1 y A_2, se verifica que

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$



Ejemplos

- Una placa de carro consiste de 6 espacios,

  $$\_\,\_\,\_ \quad \_\,\_\,\_$$

  3 para letras y 3 para números. Si no hay más restricciones, ¿cuántas placas hay?
- ¿Cuántos códigos binarios hay de longitud n?
- ¿Cuántas funciones posibles hay de la forma

  $$f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, m\}?$$

Ejemplos

- ¿Cuántos códigos QR (quick response code) hay de la siguiente forma?

Ejemplos

- ¿Cuántos dígitos binarios de longitud 8 hay que comiencen con 1 o terminen en 00?
- Un programa requiere una clave de 6 a 8 caracteres, que pueden ser letras mayúsculas o dígitos. Si la clave debe tener al menos algún dígito, ¿cuántas claves posibles hay?
- Dado $n \in \mathbb{N}^+$ y $1 \leq d < n$, ¿cuántos enteros positivos $\leq n$ hay que sean divisibles por d?

Número de divisores

Sea $n \in \mathbb{N}^+$. La función *tau* $\tau : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}$ se define como la cantidad de divisores positivos de n.

Proposición

Si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ *es la factorización en producto de números primos de* n *con* $\alpha_i > 0$ *naturales* ($1 \leq i \leq m$), *y* $m \geq 1$, *entonces*

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_m + 1).$$