Números Naturales. Axiomas de Peano

Sergio A. Carrillo
sacarrillot@unal.edu.co

Axiomas de Peano

- **Axioma 1**. Existe un elemento especial $0 \in \mathbb{N}$.
- **Axioma 2**. Existe una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, denominada función sucesor. Escribimos $s(n) = n^+$ (sucesor de n).
- **Axioma 3**. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^+ \neq 0$.
- **Axioma 4**. s es inyectiva, i.e., si $n^+ = m^+$, entonces $n = m$.
- **Axioma 5**. (Inducción) Sea $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que:
  1. $0 \in S$. 2. Si $n \in S$, entonces $n^+ \in S$. Entonces $S = \mathbb{N}$.

Denotaremos por $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $1 = 0^+, 2 = 1^+, \ldots$.

Algunas consecuencias

- Para todo $n \in \mathbb{N}^+$, existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que $n = m^+$.
- Es posible definir la suma como: dados $n, m \in \mathbb{N}$ se define

  $$m + 0 := m, \qquad m + n^+ = (m+n)^+.$$

  Los axiomas implican que $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una operación binaria que es asociativa, 0 es el elemento neutro ($0 + m = m$) y esta es conmutativa[1].
- Si $n, m, k \in \mathbb{N}$ y $n + k = m + k$, entonces $n = m$.

[1] ver primero que $m^+ + n = (m+n)^+$

Multiplicación

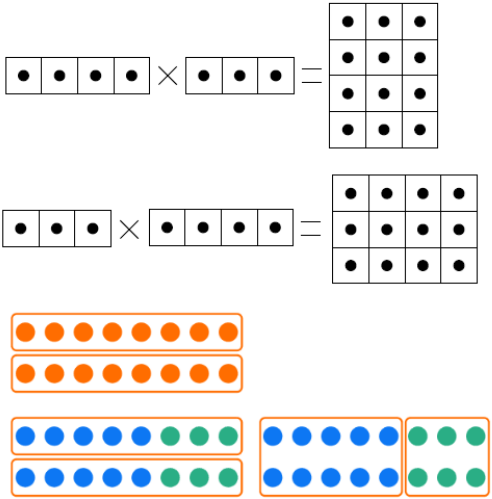
- Dados $n, m \in \mathbb{N}$ se define

$$m \cdot 0 := 0, \qquad m \cdot n^{+} = (m \cdot n) + m.$$

  Los axiomas implican que $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una operación binaria que es asociativa, conmutativa y 1 es el elemento neutro $(m \cdot 1 = m)$.

- (Distributiva) Si $n, m, k \in \mathbb{N}$, $m(n+k) = mn + mk$.
- (No hay divisores de 0) Si $mn = 0$, entonces $m = 0$ ó $n = 0$.

Conmutativa y distributiva



Orden

Decimos que $m \leq n$ si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + k$. Además $m < n$ si $m \leq n$ y $m \neq n$ ($n = m + k^+$, para algún $k \in \mathbb{N}$).

$\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{N}$ (reflexiva, antisimétrica y transitiva).

Teorema

(Tricotomía) Si $m, n \in \mathbb{N}$, exactamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera: $m < n$, $m = n$ ó $n < m$.

Orden y las operaciones

Sean $n, m, k \in \mathbb{N}$. Entonces

- Si $m < n$, entonces $m + k < n + k$.
- Si $m < n$ y $k \neq 0$, entonces $mk < nk$.
- Si $mk = nk$ y $k \neq 0$, entonces $m = n$.

El principio de inducción (PIM)

Teorema

Sea $P(n)$ una proposición definida para todo número natural n, tal que:

- *$P(0)$ es verdadera.*
- *Siempre que $P(n)$ sea verdadera, también lo es $P(n+1)$.*

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todo número natural n.

La demostración se sigue de aplicar el Axioma 5 al conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es verdadera}\}$$

para concluir que $S = \mathbb{N}$.

El principio de buena ordenación (PBO)

Teorema

Todo subconjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{N}$ posee un mínimo, es decir, existe $m \in S$, denotado por $m = \min S$, tal que $m \leq n$, para todo $n \in S$.

Si $0 \in S$ terminamos. De lo contrario, sea

$$C = \{n \in \mathbb{N} : \{0, 1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N} \setminus S\}.$$

Entonces $0 \in C$ y como $C \neq \mathbb{N}$, por el Axioma 5, existe $n_0 \in C$ con $n_0 + 1 \notin C$. Se sigue que $n_0 + 1 = \min S$.

Corolario: Dado $n \in \mathbb{N}$, no existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < m < n + 1$.

Más inducción

Notación: $\mathbb{N}_{\geq a} = \{n \in \mathbb{N} : n \geq a\}$

- (Principio de Inducción Fuerte -PIF-) Si $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq a}$ satisface que:
  1. $a \in S$.
  2. Si $k \in S$ para todo $a \leq k \leq n$, entonces $n + 1 \in S$.

  Entonces $S = \mathbb{N}_{\geq a}$.
- (Principio de Inducción II) Si $S \subseteq \mathbb{N}_{\geq a}$ satisface que:
  1. $a \in S$.
  2. Si $n \in S$, entonces $n + 1 \in S$.

  Entonces $S = \mathbb{N}_{\geq a}$.