Construcción de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

Sergio A. Carrillo
sacarrillot@unal.edu.co

Construcción de $\mathbb{Z}$

La observación fundamental es que un entero se puede poner como la resta de dos naturales, por ejemplo

$$0 = 0 - 0 = 1 - 1 = 2 - 2 = \cdots = n - n = \cdots ,$$

$$1 = 1 - 0 = 2 - 1 = 3 - 2 = \cdots = (n+1) - n = \cdots ,$$

$$-1 = 0 - 1 = 1 - 2 = 2 - 3 \cdots = n - (n+1) = \cdots ,$$

$$\vdots$$

Clases de equivalencia

Sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se define la relación

$$(a,b) \sim (c,d) \qquad \text{si y solo si} \qquad a+d=b+c.$$

De esta forma solo empleamos la suma de $\mathbb{N}$ (más no la resta).

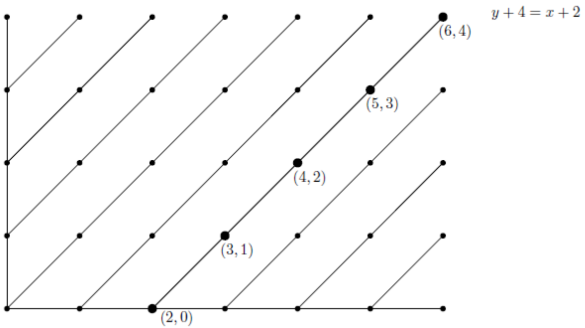
Se sigue que $\sim$ es una relación de equivalencia. Sus clases se denotan por

$$[(a,b)] = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a+y=b+x\}.$$

Los enteros se definen por

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim .$$

Vizualización de las clases



Para cada $[(a, b)] \in \mathbb{Z}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$[(a, b)] = [(n, 0)] \qquad \text{ó} \qquad [(a, b)] = [(0, n)].$$

Suma y Producto

Estas operaciones se definen por las reglas

$$[(a,b)]\oplus[(c,d)] = [(a+c,b+d)], \qquad [(a,b)]\otimes[(c,d)] = [(ac+bd,ad+bc)].$$

- Estas operaciones están bien definidas (no dependen de los representantes),
- Esta suma es asociativa, conmutativa, $[(0,0)]$ es su neutro y es invertiva. Por tanto, $(\mathbb{Z},\oplus)$ es un grupo abeliano.
- Esta multiplicación es asociativa, conmutativa y tiene como elemento neutro a $[(1,0)]$. Además, la multiplicación es distributiva con respecto a la suma.

Conclusión

$\iota : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $\iota(n) = [(n, 0)]$ es inyectiva y respeta las operaciones, es decir,

$$\iota(n+m) = \iota(n) \oplus \iota(m), \qquad \iota(nm) = \iota(n) \otimes \iota(m).$$

Esto permite ver a $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{Z}$.

Si además denotamos por $-n = [(0, n)]$, se obtiene la igualdad esperada

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Propiedades básicas

Considere $n, m, k \in \mathbb{Z}$. Entonces:

- $-(-m) = m, m(-n) = -(mn) = m(-n)$ y $(-m)(-n) = mn$.
- $m0 = 0$ y $m(-1) = -m$.
- (No hay divisores de cero) Si $nm = 0$, entonces $n = 0$ ó $m = 0$.
- (Cancelativa) Si $k \neq 0$ y $nk = mk$, entonces $n = m$.
- Si $nm = 1$, entonces $n = m = 1$ ó $n = m = -1$.

Orden

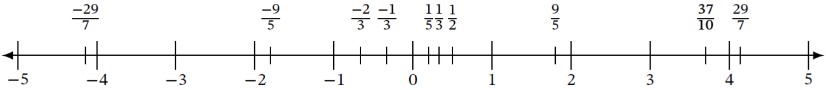
Dados $m, n \in \mathbb{Z}$ decimos que $n \leq m$ si $m - n \in \mathbb{N}$. Además $n < m$ si $m - n \in \mathbb{N}^+$.

$(\mathbb{Z}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y el orden es compatible con las operaciones:

- Si $n \leq m$, entonces $n + k \leq m + k$.
- Si $n \leq m$ y $k \leq l$, entonces $n + k \leq m + l$.
- Si $n \leq m$ y $k \geq 0$, entonces $nk \leq mk$.
- Si $n \leq m$ y $k \leq 0$, entonces $mk \leq nk$.

Los números racionales $\mathbb{Q}$

Geométricamente un número racional es una fracción m/n que se representa dividiendo la unidad en $|n|$ partes iguales y luego tomando m de estas partes.



Además sabemos por ejemplo que

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \cdots = \frac{n}{2n} = \cdots = \frac{-1}{-2} = \frac{-2}{-4} = \cdots$$

representa la única solución de $2x = 1$, que no tiene solución en $\mathbb{Z}$.

Construcción de $\mathbb{Q}$

Queremos construir fracciones de enteros $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Note que esta igualdad debería equivaler a $ad = cb$. Por tanto, consideramos sobre

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : n \neq 0\}$$

la relación

$$(m, n) \approx (p, q) \qquad \text{si y solo si} \qquad mq = np.$$

Se sigue que $\approx$ es una relación de equivalencia. Así definimos

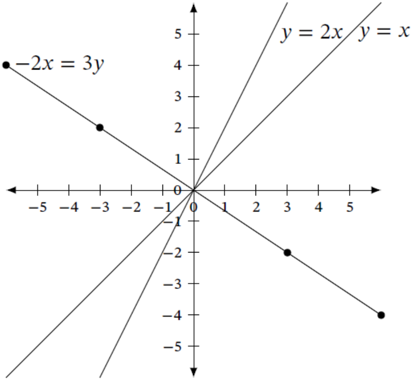
$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\approx .$$

Denotaremos a una clase por

$$[(m, n)] = \frac{m}{n}.$$

Interpretación geométrica

Cada clase $[(m, n)]$ se puede identificar con la pendiente de la recta $mx = ny$. Note además que podemos siempre suponer que $n > 0$.



Suma y Producto

$$[(a,b)] \oplus [(c,d)] = [(ad+bc, bd)], \qquad [(a,b)] \otimes [(c,d)] = [(ac, bd)]$$

que corresponder a las reglas básicas

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

- Estas operaciones están bien definidas.
- Esta suma es asociativa, conmutativa, $[(0,1)]$ es su neutro y es invertiva. Por tanto, $(\mathbb{Q}, \oplus)$ es un grupo abeliano.
- Esta multiplicación es asociativa, conmutativa, tiene como elemento neutro a $[(1,1)]$ y todo elemento distinto de $[(0,1)]$ tiene recíproco. Por tanto, $(\mathbb{Q}^*, \otimes)$ es un grupo abeliano.
- La multiplicación es distributiva con respecto a la suma. Por tanto, $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ es un **cuerpo**.

Conclusión

$\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $\iota(n) = [(n, 1)]$ es inyectiva y respeta las operaciones, es decir,

$$\iota(n+m) = \iota(n) \oplus \iota(m), \qquad \iota(nm) = \iota(n) \otimes \iota(m).$$

Esto permite ver a $\mathbb{Z}$ como subconjunto de $\mathbb{Q}$.

Dada $[(m, n)] \in \mathbb{Q}$, si $d = \gcd(m, n)$ con $m = dm', n = dn'$ y $\gcd(m', n') = 1$, escribiremos

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'},$$

y diremos que la *fracción está reducida*. A partir de ahora, cada clase será escrita simplemente como una fracción.

Orden

Dados $r = a/b, s = c/d \in \mathbb{Z}$ con $c, d > 0$, decimos que $r \leq s$ si $ad \leq bc$ en $\mathbb{Z}$. Además $r < s$ si $ad < bc$ en $\mathbb{Z}$.

$(\mathbb{Q}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado y el orden es compatible con las operaciones:

- Si $r \leq s$, entonces $r + t \leq s + t$.
- Si $r \leq s$ y $t \leq u$, entonces $r + t \leq s + u$.
- Si $r \leq s$ y $t \geq 0$, entonces $rt \leq st$.
- Si $r \leq s$ y $t \leq 0$, entonces $st \leq rt$.