Construcción de los números reales: Sucesiones de Cauchy. Cortaduras de Dedekind

Sergio A. Carrillo
sacarrillot@unal.edu.co

Propiedades de límites

Sean $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ sucesiones de números racionales. Entonces:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ es equivalente a que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a_n, a) = 0$.
- Si $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo n y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} a_n + b_n = a + b.$$

Sucesiones de Cauchy

Una sucesión $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ se dice *de Cauchy* si: Para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, para todos $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\text{si } m > n \geq N, \text{ entonces } d(a_n, a_m) = |a_n - a_m| < \epsilon.$$

- Una sucesión convergente siempre es de Cauchy. En particular, una sucesión constante es de Cauchy.
- Dados $c_0, c_1, c_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$ arbitrarios, entonces

$$a_n = c_0 + \frac{c_1}{10} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} \in \mathbb{Q}$$

define una sucesión de Cauchy.

Equivalencia de sucesiones

Sea $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ el conjunto de sucesiones de Cauchy con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Decimos que dos sucesiones $\boldsymbol{a} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \boldsymbol{b} = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$ son *equivalentes* $(\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b})$ si

$$\lim_{n\to+\infty} a_n - b_n = 0.$$

Ejemplos: $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{n}{n^3+1}, c_n = \frac{(-1)^n}{n^2}, d_n = 0$ son todas sucesiones equivalentes.

Proposición

$\sim$ *es una relación de equivalencia sobre* $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$.

Un modelo para $\mathbb{R}$

Un modelo para los números reales está dado por

$$\mathbb{R} := \mathcal{C}_{\mathbb{Q}} / \sim .$$

La idea intuitiva es que cada clase $[\boldsymbol{a}]$ representa al límite al que debería converge esta sucesión.

- (Suma) $[\boldsymbol{a}] + [\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}]$, donde $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (Producto) $[\boldsymbol{a}] \cdot [\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}]$, donde $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \{a_n \cdot b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- (Orden) $[\boldsymbol{a}] < [\boldsymbol{b}]$ si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n - a_n > 0$, para todo $n \geq N$.

Algunas propiedades

- $\mathbb{R}$ contiene a una copia de $\mathbb{Q}$ a través de la aplicación

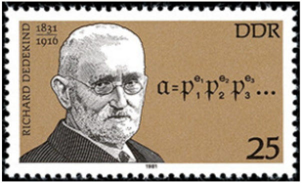
$$\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad \iota(r) = [\boldsymbol{r}], \qquad \boldsymbol{r} = \{r\}_{n\in\mathbb{N}}$$

  la sucesión constante. Esta aplicación es inyectiva y preserva operaciones y orden.
- $[\mathbf{0}]$ es el neutro para la suma y $[\mathbf{1}]$ es el neutro para el producto. Además $[a]^{-1}$ existe en $\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}$.
- $(\mathcal{C}_{\mathbb{Q}}, +, \cdot, <)$ es un cuerpo ordenado completo.

Cortaduras de Dedekind

Una *cortadura* (inferior) es un conjunto $\emptyset \neq \alpha \subsetneq \mathbb{Q}$ tal que

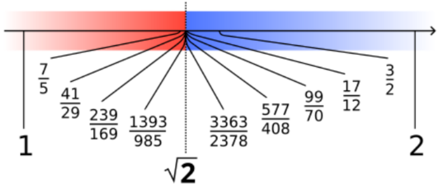
- Si $p \in \alpha$ y $q \in \mathbb{Q}$ satisface $q < p$, entonces $q \in \alpha$.
- Si $p \in \alpha$, existe $r \in \alpha$ tal que $p < r$.



Propiedades: (1) Si $p \in \alpha, q \notin \alpha$, entonces $p < q$.
(2) Si $r \notin \alpha$ y $r < s$, entonces $s \notin \alpha$.

Ejemplos

- Si $r \in \mathbb{Q}$, entonces $r^* := (-\infty, r) \cap \mathbb{Q}$ es una cortadura. Además
$$\iota : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \qquad \iota(r) = r^*$$
es inyectiva y preserva operaciones y orden que se definirán a continuación.
- También lo es
$$\alpha = \{r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 2\} \cup (-\infty, 0) \cap \mathbb{Q},$$
que intuitivamente representa a $\sqrt{2}$.



Orden y completitud

Este modelo plantea $\mathbb{R}$ como el conjunto de cortaduras de $\mathbb{Q}$. Definimos $\alpha < \beta$ si $\alpha \subsetneq \beta$.

- (Tricotomía). Dadas dos cortaduras α, β, siempre vale que $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ ó $\beta < \alpha$.
- (Completitud) Dado $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente, digamos $\alpha < \beta$, para todo $\alpha \in A$. Sea

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha \subseteq \mathbb{Q}.$$

Entonces $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\gamma = \sup A$.

Operaciones con cortaduras

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se define

$$\alpha + \beta := \{r + s \in \mathbb{Q} : r \in \alpha, s \in \beta\}.$$

$(\mathbb{R}, +)$ resulta ser un grupo abeliano con neutro 0^* e inverso $-\alpha = \{p \in \mathbb{Q} : \text{existe } r \in \mathbb{Q}^+, -p - r \notin \alpha\}$.

Si $\alpha > 0^*$ y $\beta > 0^*$, se define

$$\alpha \cdot \beta := \{r \cdot s \in \mathbb{Q} : r \in \alpha, s \in \beta\}.$$

Los demás casos se definen aplicando las leyes de los signos.